

Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82^{*}

P. Bretagnon

Service de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes, Equipe de Recherche Associée au CNRS, 77 avenue Denfert-Rochereau, F-75014 Paris, France

Reçu le 11 mai, accepté le 21 juin 1982

Theory for the Motion of All the Planets. The VSOP82 Solution

Introduction

Summary. The VSOP82 solution is made of the perturbations developed up to the third order of the masses for all the planets. Perturbations up to the sixth order obtained by an iterative method complete the theory of the four outer planets. It also contains the perturbations of the Moon onto the Earth-Moon barycenter and the relativistic perturbations expressed in isotropic and standard coordinates. The integration constants are determined by adjustment to the numerical integration DE200.

Cette publication fait suite à une série de trois articles dans lesquels nous avons développé une partie des méthodes utilisées pour la construction de la solution VSOP82. Dans un premier article (Bretagnon, 1980), nous avons exposé une méthode de construction des perturbations planétaires ordre par ordre par rapport aux masses et son application jusqu'au deuxième ordre. Dans un deuxième article (Bretagnon, 1981), nous avons montré qu'il était possible, par une méthode itérative, de compléter à des ordres élevés des masses les résultats de la méthode précédente. Il est en effet nécessaire, dans le cas des quatre grosses planètes, de déterminer les perturbations jusqu'à l'ordre 6. Enfin, dans un troisième article (Bretagnon, 1982a), nous avons déterminé un ensemble cohérent de constantes d'intégration par ajustement à l'intégration numérique d'Oesterwinter et Cohen (1972). C'est à partir de ces nouvelles constantes d'intégration que nous avons entrepris la construction de VSOP82.

In the first part, we develop the method used for the construction of the third order perturbations with respect to the masses. We give the form of the equations [formula (2)] and give the example of one second derivative [formula (6) and appendix]. For the computation of the third order it has been necessary, for each of the 28 couples of planets taken by pairs, to build up 936 second derivatives, and to multiply every one of these derivatives by the corresponding increment of the formula (2).

In our second part, we show how we have completed the theory of the outer planets up to the sixth order, by an iterative method. The comparison to an internal numerical integration over 1000 yr shows the obtained accuracy (Table 3 and Fig. 1).

In the third part we compare VSOP82 to the numerical integration of the JPL (Standish, 1982). Adjustment to DE200 gives the constants of integration of Table 4.

In the fourth part, we study the differences VSOP82 – DE200. Table 6 shows the most important discrepancies over one century, for every planet. Figures 2 and 3 show the differences in the way VSOP82 – DE200 for the true longitudes. Finally, in Table 7 we give the mean elements connected to the fixed J2000 ecliptic and in Table 8 the mean elements connected to the ecliptic of the date.

The new planetary theories TOP82 (Simon, 1982) and VSOP82 show real progress compared to the former theories of Le Verrier and Newcomb. They will replace Le Verrier theories in the ephemerides for the Sun and the planets which will be published as of 1984 by the Bureau des Longitudes.

Key words: celestial mechanics – planetary theory

La solution VSOP82 est constituée des perturbations développées jusqu'au troisième ordre des masses pour l'ensemble des planètes. Des perturbations jusqu'à l'ordre 6 obtenues par la méthode itérative complètent la théorie des quatre grosses planètes. Elle comprend également les perturbations de la Lune sur le barycentre Terre-Lune et les perturbations relativistes exprimées en coordonnées isotropiques et en coordonnées standard (Lestrade et Bretagnon, 1982). Les constantes d'intégration sont déterminées par ajustement à l'intégration numérique du JPL : DE200 (Standish, 1982).

Nous allons exposer les méthodes que nous avons utilisées pour construire les perturbations du troisième ordre par rapport aux masses. Nous montrerons comment nous avons pu résoudre les problèmes de convergence dans la méthode itérative. Nous indiquerons la précision de la solution VSOP82 mise en évidence par des comparaisons à des intégrations numériques internes. Enfin, nous donnerons les comparaisons de notre solution à DE200 et les constantes d'intégration qui se déduisent de cette comparaison.

I. Construction des perturbations du troisième ordre par rapport aux masses

Ces perturbations sont obtenues par intégration des équations de Lagrange développées par rapport aux masses. Ecrivons chaque

* Le sigle VSOP82 représente la version 1982 des Variations Séculaires des Orbites Planétaires sans présager de la qualité du cru

équation de Lagrange sous la forme:

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_\sigma(x_i) \quad (1)$$

où $x_i = x_i^{(0)} + \Delta^{(1)}x_i + \Delta^{(2)}x_i$ est l'un des douze éléments de la planète considérée et de la planète perturbatrice. $x_i^{(0)}$ représente la solution keplerienne. $\Delta^{(1)}x_i$ représente l'ensemble des perturbations du premier ordre par rapport aux masses de l'élément x_i et $\Delta^{(2)}x_i$ l'ensemble des perturbations du deuxième ordre.

Le développement de Taylor de l'équation (1) limité aux termes d'ordre 3 donne:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = f_\sigma(x_i^{(0)}) + \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(1)}x_i \\ + \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(2)}x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta^{(1)}x_i \Delta^{(1)}x_j. \end{aligned} \quad (2)$$

L'intégration de $f_\sigma(x_i^{(0)})$ donne les perturbations du premier ordre $\Delta^{(1)}x_i$. L'intégration de

$$\sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(1)}x_i$$

donne les perturbations du deuxième ordre $\Delta^{(2)}x_i$. L'intégration du reste de l'expression (2) donne celles du troisième ordre $\Delta^{(3)}x_i$.

Pour obtenir les perturbations du troisième ordre il faut donc construire l'ensemble des dérivées premières ($\partial f_\sigma / \partial x_i$) et secondes ($\partial^2 f_\sigma / (\partial x_i \partial x_j)$) de l'équation (2).

Nous avons donné (Bretagnon, 1980) le formulaire complet permettant de calculer les dérivées premières. Rappelons les notations de cet article. Les solutions sont représentées dans les variables a, λ, k, h, q et p avec $k = e \cos \tilde{\omega}$, $h = e \sin \tilde{\omega}$, $q = \gamma \cos \Omega$, $p = \gamma \sin \Omega$, $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ où a est le demi-grand axe, λ la longitude moyenne de la planète, e l'excentricité de l'orbite, $\tilde{\omega}$ la longitude du périhélie, i l'inclinaison, Ω la longitude du nœud. Nous notons également:

$$\begin{aligned} z = k + \sqrt{-1}h; \quad \zeta = q + \sqrt{-1}p, \\ \phi = (1 - z\bar{z})^{1/2}; \quad \psi = \frac{1}{1 + \phi}; \quad \chi = (1 - \zeta\bar{\zeta})^{1/2}; \quad \Gamma = \frac{1 - 2\zeta\bar{\zeta}}{2\chi}, \\ \varrho = r \cos w + \sqrt{-1}r \sin w; \quad \tau = \varrho/r \end{aligned}$$

où la longitude vraie w est définie par: $w = v + \tilde{\omega}$, v étant l'anomalie vraie.

Si V et V' désignent les vecteurs de position des planètes P et P' , les équations de Lagrange de la planète P perturbée par la planète P' s'écrivent pour un élément σ quelconque:

$$\frac{d\sigma}{dt} = D_\sigma V(R_1 V + R_2 V') = f_\sigma \quad (3)$$

avec:

$$R_1 = -\frac{na m'}{1+m} \frac{1}{\Delta^3}; \quad R_2 = \frac{na m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right). \quad (4)$$

Δ est la distance entre les deux planètes, r' le rayon vecteur de la planète perturbatrice; m et m' sont les masses des planètes P et P' . Les quantités vectorielles $D_\sigma V$ sont définies dans (Bretagnon, 1980).

Comme pour les dérivées premières, nous avons choisi d'exprimer les dérivées secondes sous forme fermée afin de déterminer parfaitement la précision du calcul. Ceci entraîne la

construction d'un formulaire assez lourd mais qui ne présente pas de difficultés. Nous allons donner, sur l'exemple de la dérivée ($\partial^2 f_a / \partial k \partial h$), la manière d'établir le formulaire. Partons des équations (3) et (4) et introduisons les notations:

$$R_3 = \frac{3}{2} \frac{na m'}{1+m} \frac{1}{\Delta^5}; \quad R_4 = -\frac{15}{4} \frac{na m'}{1+m} \frac{1}{\Delta^7}. \quad (5)$$

Quels que soient x différent de a et y différent de a , on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 D_\sigma V}{\partial x \partial y} (R_1 V + R_2 V') + \frac{\partial D_\sigma V}{\partial x} \left[R_1 \frac{\partial V}{\partial y} + R_3 \frac{\partial \Delta^2}{\partial y} (V - V') \right] \\ + \frac{\partial D_\sigma V}{\partial y} \left[R_1 \frac{\partial V}{\partial x} + R_3 \frac{\partial \Delta^2}{\partial x} (V - V') \right] \\ + D_\sigma V \left[R_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + R_3 \frac{\partial \Delta^2}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + R_3 \frac{\partial^2 \Delta^2}{\partial x \partial y} (V - V') \right. \\ \left. + R_3 \frac{\partial \Delta^2}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + R_4 \frac{\partial \Delta^2}{\partial y} \frac{\partial \Delta^2}{\partial x} (V - V') \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Nous donnons en appendice l'ensemble des expressions qui interviennent dans la formule (6) dans le cas $\sigma = a$, $x = k$, $y = h$. Les expressions (4), (5) et (6) ainsi que l'ensemble des dérivées données en appendice permettent donc d'exprimer complètement la dérivée ($\partial^2 f_a / \partial k \partial h$).

L'ensemble du formulaire des 78 dérivées de chacune des 12 variables d'un couple de planètes s'établit de la même manière. On constate que ce formulaire est très lourd et que les opérations à effectuer sont très nombreuses. Il est donc nécessaire de veiller à séparer les opérations qui conduisent à des séries courtes (de l'ordre de 200 arguments) de celles qui conduisent à des séries de plusieurs milliers d'arguments. Ainsi, chaque dérivée peut s'écrire sous la forme:

$$T_0 + T_1 \frac{1}{\Delta^3} + T_2 \frac{1}{\Delta^5} + T_3 \frac{1}{\Delta^7}$$

où T_0, T_1, T_2, T_3 sont des séries dépendant de la solution du problème des deux corps pour les deux planètes du couple considéré. Ces séries sont peu volumineuses et sont toutes calculées dans des tableaux de 256 arguments. Les séries $1/\Delta^3$, $1/\Delta^5$, $1/\Delta^7$ peuvent atteindre 2000 arguments mais sont calculées une seule fois pour l'ensemble des calculs concernant un couple de planètes. Enfin, les produits $\Delta^{(1)}x_i \times \Delta^{(1)}x_j$ de l'équation (2) sont calculés une seule fois pour les 12 variables σ du couple considéré; ces produits sont très volumineux et sont calculés dans des tableaux de 4096 arguments.

Les tailles de tableaux que nous venons d'indiquer couvrent tous les besoins du calcul des perturbations du troisième ordre par rapport aux masses de l'ensemble des 28 couples de planètes prises 2 à 2 pour la précision que nous nous sommes fixée. Cette précision dépend de la planète et de l'argument considéré: pour chaque planète, nous nous sommes fixé une certaine fréquence minimum ν telle que tous les arguments de fréquence supérieure à ν soient déterminés à une précision supérieure ou égale à 0,001. Nous donnons dans le Tableau 1 ces fréquences ν et les périodes correspondant.

Par ailleurs, nous avons tronqué les solutions à 0,00001 pour les planètes inférieures et à 0,0001 pour les grosses planètes et presque tous les arguments sont déterminés à ces précisions. Pour chaque planète, quelques arguments de fréquence un peu supérieure à celle du Tableau 1 sont déterminés à une précision comprise entre 0,001 et la précision de troncature. Nous avons, au cours du calcul, rencontré quelques arguments de fréquence

Tableau 1. Fréquences correspondant à la précision 0,001

Planète	Merc.	Vénus	Terre	Mars	Jup.	Sat.	Uran.	Nept.
Fréquence en "/an	2000"	1000"	300"	300"	200"	200"	200"	200"
Période en années	648	1296	4320	4320	6480	6480	6480	6480

Tableau 2. Arguments du troisième ordre de très petits diviseurs

Argument	Fréquence en "/an	Période en années	Planète	Argument	Fréquence en "/an	Période en années	Planète
1 $2\lambda_5 - 5\lambda_6$	- 1467,27	883	Me	17 $2\lambda_5 - 2\lambda_6 - 10\lambda_7 + 3\lambda_8$	- 130,59	9 924	J S U N
2 $2\lambda_5 - 6\lambda_6 + 3\lambda_7$	+ 811,06	1 598	Me V	18 $3\lambda_5 - 5\lambda_6 - 8\lambda_7 + 2\lambda_8$	+ 121,84	10 637	U
3 $\lambda_1 - 10\lambda_3 + 11\lambda_4$	+ 800,60	1 619	Me	19 $\lambda_5 - 2\lambda_6 - 8\lambda_7 + 13\lambda_8$	+ 117,46	11 034	U
4 $4\lambda_3 - 8\lambda_4 + 3\lambda_5$	- 726,70	1 783	V	20 $2\lambda_5 - 6\lambda_6 + 6\lambda_7 - 6\lambda_8$	- 107,52	12 054	J S U N
5 $\lambda_7 - 2\lambda_8$	- 306,19	4 233	V	21 $\lambda_5 + 2\lambda_6 - 24\lambda_7 + 22\lambda_8$	+ 94,38	13 732	U
6 $\lambda_4 - 11\lambda_5 + 12\lambda_6 - \lambda_7$	- 243,52	5 322	M	22 $\lambda_4 - 5\lambda_5 - 5\lambda_6 + 5\lambda_7$	- 88,67	14 616	M
7 $10\lambda_3 - 19\lambda_4 + 3\lambda_6$	- 202,23	6 409	T M	23 $3\lambda_2 - 18\lambda_3 + 25\lambda_4 - 2\lambda_5$	+ 86,67	14 952	M
8 $2\lambda_5 - 6\lambda_6 + 5\lambda_7 - 4\lambda_8$	+ 198,68	6 523	J S U N	24 $\lambda_5 + \lambda_6 - 13\lambda_7 + 6\lambda_8$	- 76,84	16 867	U
9 $\lambda_5 - 2\lambda_6 - 7\lambda_7 + 11\lambda_8$	- 188,74	6 867	U N	25 $\lambda_5 - 3\lambda_6 + 3\lambda_7 - 3\lambda_8$	- 53,76	24 107	J S U N
10 $3\lambda_5 - 5\lambda_6 - 7\lambda_7$	- 184,35	7 030	J S U	26 $4\lambda_5 - 11\lambda_6 + \lambda_7 + 4\lambda_8$	- 43,82	29 575	J S N
11 $2\lambda_5 - 2\lambda_6 - 11\lambda_7 + 5\lambda_8$	+ 175,60	7 380	U N	27 $3\lambda_5 - 12\lambda_6 + 14\lambda_7 - 2\lambda_8$	+ 33,01	39 256	J S U
12 $\lambda_6 - 11\lambda_7 + 16\lambda_8$	+ 171,22	7 569	U N	28 $4\lambda_6 - 16\lambda_7 + 9\lambda_8$	- 23,08	56 163	U N
13 $\lambda_5 - 6\lambda_6 + 9\lambda_7 + 2\lambda_8$	- 165,66	7 823	S U	29 $8\lambda_3 - 16\lambda_4 + 4\lambda_5 + 5\lambda_6$	+ 13,87	93 462	T M
14 $6\lambda_5 - 17\lambda_6 + 6\lambda_7$	+ 154,86	8 369	J S U	30 $3\lambda_5 - 8\lambda_6 - 2\lambda_7 + 7\lambda_8$	+ 9,94	130 400	J S U N
15 $6\lambda_5 - 17\lambda_6 + 7\lambda_7 - 2\lambda_8$	- 151,34	8 564	J S	31 $2\lambda_2 - 7\lambda_4 + 8\lambda_5 - 6\lambda_6$	+ 3,55	364 875	M
16 $\lambda_6 - 10\lambda_7 + 14\lambda_8$	- 134,98	9 602	U N				

Tableau 3. Plus grosses différences entre la théorie et l'intégration numérique sur 1000 ans. L'unité est 10⁻¹⁰ (10⁻¹⁰ UA pour a et le rayon vecteur)

Planète	a	λ	k	h	q	p	longitude	latitude	rayon vecteur
Jupiter	2249	3446	809	502	439	564	4719	1332	3135
Saturne	7100	6672	1040	915	710	439	9213	1395	13729
Uranus	12348	1346	2027	1362	454	804	3735	1581	40888
Neptune	20198	2420	465	404	281	202	3092	494	29743

Tableau 4. Constantes d'intégration J2000 (2451 545) de la solution VSOP82

Planète	λ ⁰ (Rd)	N (Rd/an)	k ₀	h ₀	q ₀	P ₀
Mercure	4,402 608 842 40	26,087 903 141 574 2	+ 0,044 660 597 60	+ 0,200 723 313 68	+ 0,040 615 633 84	+ 0,045 635 504 61
Vénus	3,176 146 696 89	10,213 285 546 211 0	- 0,004 492 821 33	+ 0,005 066 847 26	+ 0,006 824 101 42	+ 0,028 822 857 75
Terre	1,753 470 314 35	6,283 075 849 180 0	- 0,003 740 816 50	+ 0,016 284 476 63	0	0
Mars	6,203 480 913 41	3,340 612 431 492 3	+ 0,085 365 602 52	- 0,037 899 732 36	+ 0,010 470 425 74	+ 0,012 284 493 07
Jupiter	0,599 546 497 39	0,529 690 965 094 6	+ 0,046 985 721 24	+ 0,012 003 857 48	- 0,002 065 610 98	+ 0,011 183 771 57
Saturne	0,874 016 756 50	0,213 299 095 438 0	- 0,002 960 035 95	+ 0,055 429 642 54	- 0,008 717 474 36	+ 0,019 891 473 01
Uranus	5,481 293 871 59	0,074 781 598 567 3	- 0,045 951 323 76	+ 0,005 637 913 07	+ 0,001 859 150 75	+ 0,006 486 170 08
Neptune	5,311 886 286 76	0,038 133 035 637 8	+ 0,005 999 775 71	+ 0,006 692 424 13	- 0,010 291 478 19	+ 0,011 516 839 85

inférieure à celles du Tableau 1. Pour ces arguments la précision est moindre, dans le rapport de la fréquence à celle du Tableau 1 ou dans le carré de ce rapport pour les longitudes. Nous donnons, dans le Tableau 2, la liste de ces arguments en indiquant les planètes où ils apparaissent à la précision du calcul. La colonne «Planète» ne contient donc pas les planètes pour lesquelles l'argument est déterminé à une précision meilleure que 0,001. Pour le premier argument, par exemple, on ne trouve pas Jupiter ni Saturne dans cette colonne. L'argument $2\lambda_5 - 5\lambda_6$ apparaît pourtant à tous les ordres pour ces planètes mais il est calculé à une précision de 0,0001.

Comme nous venons de le voir, la détermination des perturbations du troisième ordre par rapport aux masses a donc nécessité, pour chacun des 28 couples de planètes, la construction de 936 dérivées et le produit de chacune de ces dérivées par la quantité correspondante $\Delta^{(1)}x_i \times \Delta^{(1)}x_j$ de l'équation (2). L'ensemble de ce calcul a demandé 10 heures sur l'ordinateur IBM 370-168 du CIRCE.

Le calcul des perturbations du premier, du deuxième et du troisième ordre a été effectué à partir des constantes d'intégration rapportées à l'écliptique J2000 et des masses planétaires publiées dans Bretagnon (1982a). Des exemples des perturbations du troisième ordre ont été donnés concernant la longitude moyenne de Mars dans (Bretagnon, 1982b) ainsi qu'une comparaison à une intégration numérique interne pour les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars.

II. Amélioration de la théorie de Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune par la méthode itérative

Nous avons repris la méthode itérative décrite dans (Bretagnon, 1981). Cette méthode nous permet de compléter notre solution pour les grosses planètes par des termes d'ordre 4, 5 et 6 par rapport aux masses.

Nous avons indiqué, dans cet article, des difficultés de convergence pour la détermination de l'argument $\lambda_7 - 2\lambda_8$ dans les demi-grands axes et les longitudes moyennes d'Uranus et de Neptune. Ces difficultés se rencontraient essentiellement dans le calcul des perturbations de Jupiter sur Uranus et Neptune et, à un niveau moindre, de Saturne sur Uranus et Neptune. Pour résoudre ce problème, au cours des 7 itérations que nous avons effectuées, nous avons procédé de la manière suivante. A l'issue de chaque itération, nous avons, pour l'argument $\lambda_7 - 2\lambda_8$, conservé les résultats de la théorie au troisième ordre pour les perturbations de Jupiter et Saturne sur Uranus et Neptune et utilisé les résultats de la méthode itérative pour les perturbations d'Uranus et Neptune entre elles. Ceci a permis de stabiliser les valeurs de cet argument puis d'assurer la convergence interne de la méthode itérative à partir de la cinquième itération, sans plus utiliser les résultats de la théorie au troisième ordre.

Afin d'améliorer la précision, nous avons agrandi la taille des tableaux dans lesquels nous calculons les seconds membres des équations de Lagrange et les plus grosses séries sont calculées dans des tableaux de 16384 arguments.

Pour estimer la précision atteinte nous avons comparé notre solution à une intégration numérique interne. La solution est donc constituée de la théorie au troisième ordre des masses complétée aux ordres supérieurs par la méthode itérative. L'intégration numérique est une intégration sur un intervalle de 1000 ans du Soleil et des quatre grosses planètes, les masses des planètes inférieures étant mises au Soleil. Nous avons étudié les écarts entre la théorie et l'intégration numérique pour les 6 variables elliptiques

a, λ, k, h, q et p ainsi que pour les coordonnées longitude, latitude et rayon vecteur. Nous donnons dans le Tableau 3 les plus gros écarts sur l'intervalle de 1000 ans pour ces 9 quantités et pour chaque planète. L'unité est 10^{-10} UA pour le demi-grand axe et le rayon vecteur, 10^{-10} Rd pour les autres quantités.

Nous avons représenté sur la Fig. 1 les écarts sur 1000 ans pour les longitudes vraies des quatre planètes. L'axe des ordonnées de gauche donne les écarts en 10^{-10} Rd, l'axe de droite les écarts en seconde de degré.

III. Comparaison à DE200. Amélioration des constantes d'intégration

Nous avons déterminé de nouvelles constantes d'intégration par comparaison et ajustement de notre solution à l'intégration numérique DE200 du JPL (Standish, 1982).

Les précédentes constantes qui ont servi à la construction de la théorie au troisième ordre avaient été déterminées par comparaison à l'intégration numérique d'Oesterwinter et Cohen (1972). Les différences de constantes d'intégration sont petites et il n'est pas nécessaire d'en tenir compte dans le calcul des perturbations des planètes inférieures, perturbations dont l'amplitude ne dépasse pas quelques secondes.

Dans le cas des quatre grosses planètes l'amplitude des plus importantes perturbations atteint 3000". Nous avons donc ajusté notre solution à DE200 à l'issue de chacune des trois dernières itérations de la méthode itérative afin de faire converger les constantes d'intégration et d'avoir des perturbations calculées à l'aide des constantes d'intégration définitives.

Définition du repère

L'intégration numérique DE200 est rapportée à un «repère dynamique rotationnel ou observé» tel qu'il est défini par Standish (1981). Standish définit également l'équinoxe dynamique inertiel $\gamma_B^{(I)}$ et l'obliquité $\varepsilon_B^{(I)}$. Ces quantités sont liées à l'équinoxe dynamique rotationnel $\gamma_B^{(R)}$ et à l'obliquité $\varepsilon_B^{(R)}$ par les relations:

$$\gamma_B^{(I)} \gamma_B^{(R)} = +0,09366$$

$$\varepsilon_B^{(R)} - \varepsilon_B^{(I)} = +0,00334$$

pour l'époque J2000.

Le plan xOy du repère de DE200 est, selon les auteurs, dans le plan de l'équateur du FK5-J2000. L'axe des x forme avec l'équinoxe du FK5-J2000 un angle de $-0,006$.

Par ajustement de notre solution à DE200 nous avons défini l'écliptique dynamique inertiel, repère dans lequel notre solution est définie. Ce repère est tel que les variables en inclinaison de la Terre: q_T et p_T soient nulles. Il est défini par son équinoxe dynamique γ_{Dyn} :

$$\gamma_{\text{FK5}} \gamma_{\text{Dyn}} = -0,0990$$

et par l'inclinaison de l'écliptique dynamique sur l'équateur du FK5:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{Dyn}} &= \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = 23^\circ 26' 21,448'' - 0,0389 \\ &= 23^\circ 26' 21,4091''. \end{aligned}$$

Les nouvelles constantes d'intégration de notre solution rapportée à l'écliptique dynamique ainsi défini sont données, pour l'époque J2000 (2451545), dans le Tableau 4. La quantité λ^0 représente la longitude moyenne à l'époque origine J2000 et est en

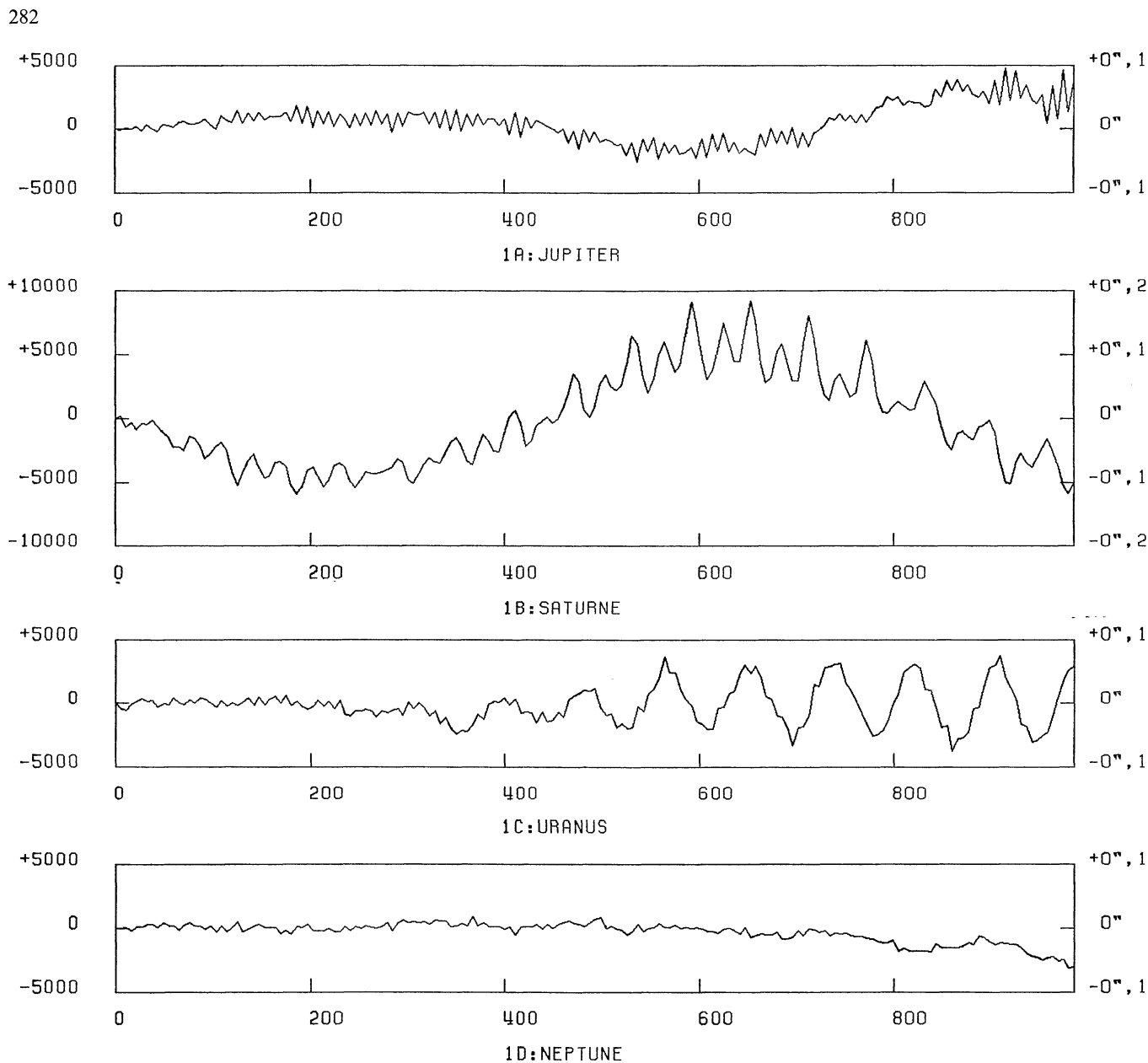


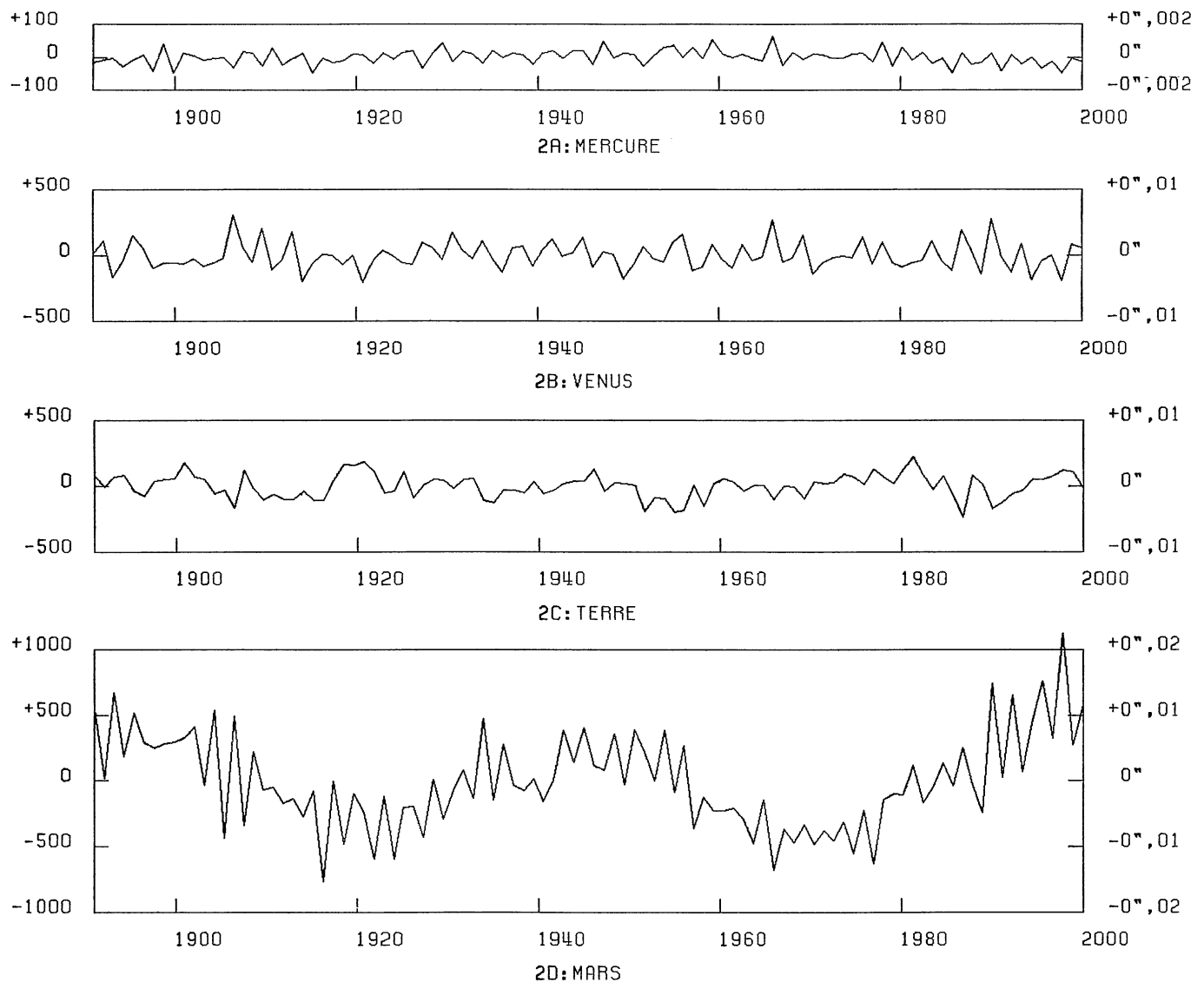
Fig. 1a-d. Longitudes vraies. Comparaison de la théorie à l'intégration numérique interne sur 1000 ans. L'unité est 10^{-10} radian (échelle de gauche) ou la seconde de degré (échelle de droite)

Tableau 5. Constantes J2000 de la solution VSOP82

Planète	$1/m$	δn (10^{-5} Rd/an)	n_0 (Rd/an)	a_0
Mercure	6 023 600	- 3,289 232 82	26,087 936 033 902 4	0,387 098 350 584 818
Vénus	408 523,5	- 5,017 007 59	10,213 335 716 286 9	0,723 329 859 446 194
Terre	328 900,5	+ 0,962 039 48	6,283 066 228 785 2	1,000 001 057 266 65
Mars	3 098 710	- 4,043 836 66	3,340 652 869 858 9	1,523 679 381 647 2
Jupiter	1 047,355	- 3,082 363 80	0,529 721 788 732 6	5,202 603 230 909
Saturne	3 498,5	+ 53,720 046 46	0,212 761 894 973 4	9,554 909 635 329
Uranus	22 869	+ 20,479 656 30	0,074 576 802 004 3	19,218 446 101 3
Neptune	19 314	+ 10,460 487 76	0,038 028 430 760 2	30,110 386 908 9

Tableau 6. Plus grosses différences entre VSOP82 et DE200 sur l'intervalle 1891–2000. L'unité est 10^{-10} (10^{-10} UA pour a et le rayon vecteur)

Planète	a	λ	k	h	q	p	longitude	latitude	rayon vecteur
Mercure	3	29	22	24	7	9	62	14	9
Vénus	39	205	130	100	64	54	308	105	90
Terre	61	168	161	141	83	60	240	114	160
Mars	270	534	326	339	96	112	1119	188	478
Jupiter	3017	1874	1300	1403	152	104	3442	262	6579
Saturne	12836	4468	3345	2647	145	203	6999	369	29586
Uranus	39081	2172	1864	2101	177	200	804	263	18865
Neptune	253770	8143	7210	3670	132	212	4209	231	135805

**Fig. 2a–d.** Longitudes vraies de Mercure, Vénus, la Terre et Mars. Différences VSOP82–DE200 sur un siècle. L'unité est 10^{-10} radian (échelle de gauche) ou la seconde de degré (échelle de droite)

radians. Le moyen mouvement N est en radians par an. Les quantités k_0 , h_0 , q_0 et p_0 sont sans dimension. Nous donnons de plus, dans le Tableau 5, les quantités $1/m$, δn , n_0 et a_0 .

Le coefficient n_0 est défini par la relation:

$$n_0 = N - \delta n$$

où δn représente l'ensemble des perturbations séculaires de la longitude moyenne. Le demi-grand axe a_0 est donné par la relation:

$$n_0^2 a_0^3 = f(1 + m)$$

où f est la constante de la gravitation et m le rapport de la masse de la planète à celle du Soleil.

IV. Solution VSOP82

La solution VSOP82 est constituée d'une théorie au troisième ordre des masses pour l'ensemble des planètes complétée par des termes d'ordre supérieur pour les grosses planètes. La théorie du

barycentre Terre-Lune est augmentée de perturbations dues à la Lune (Bretagnon, 1980). La solution contient de plus, pour l'ensemble des planètes, les perturbations relativistes en coordonnées isotropiques et standard (Lestrade et Bretagnon, 1982). Les constantes d'intégration de VSOP82 sont déterminées par ajustement à DE200. L'ensemble de cette solution est regroupée, par planète, sur bande magnétique et est disponible au Bureau des Longitudes.

Les différences entre la théorie et DE200 donnent un ordre de grandeur de la précision de VSOP82. Nous donnons dans le Tableau 6 les plus gros écarts entre VSOP82 et DE200 sur l'intervalle allant du 25 septembre 1891 à 0 heure (2412000.5) au 26 février 2000 à 0 heure (2451600.5) pour les variables a , λ , k , h , q et p ainsi que pour la longitude, la latitude et le rayon vecteur. L'unité est 10^{-10} UA pour le demi-grand axe et le rayon vecteur, 10^{-10} radian pour les autres quantités.

Si on compare le Tableau 6 au Tableau 3 et aux courbes de la Fig. 1 sur un siècle à partir de l'origine, on constate des différences anormalement importantes entre VSOP82 et DE200 pour les planètes Jupiter, Saturne et Neptune. Ceci provient de l'utilisation de masses planétaires différentes dans les deux solutions. En effet,

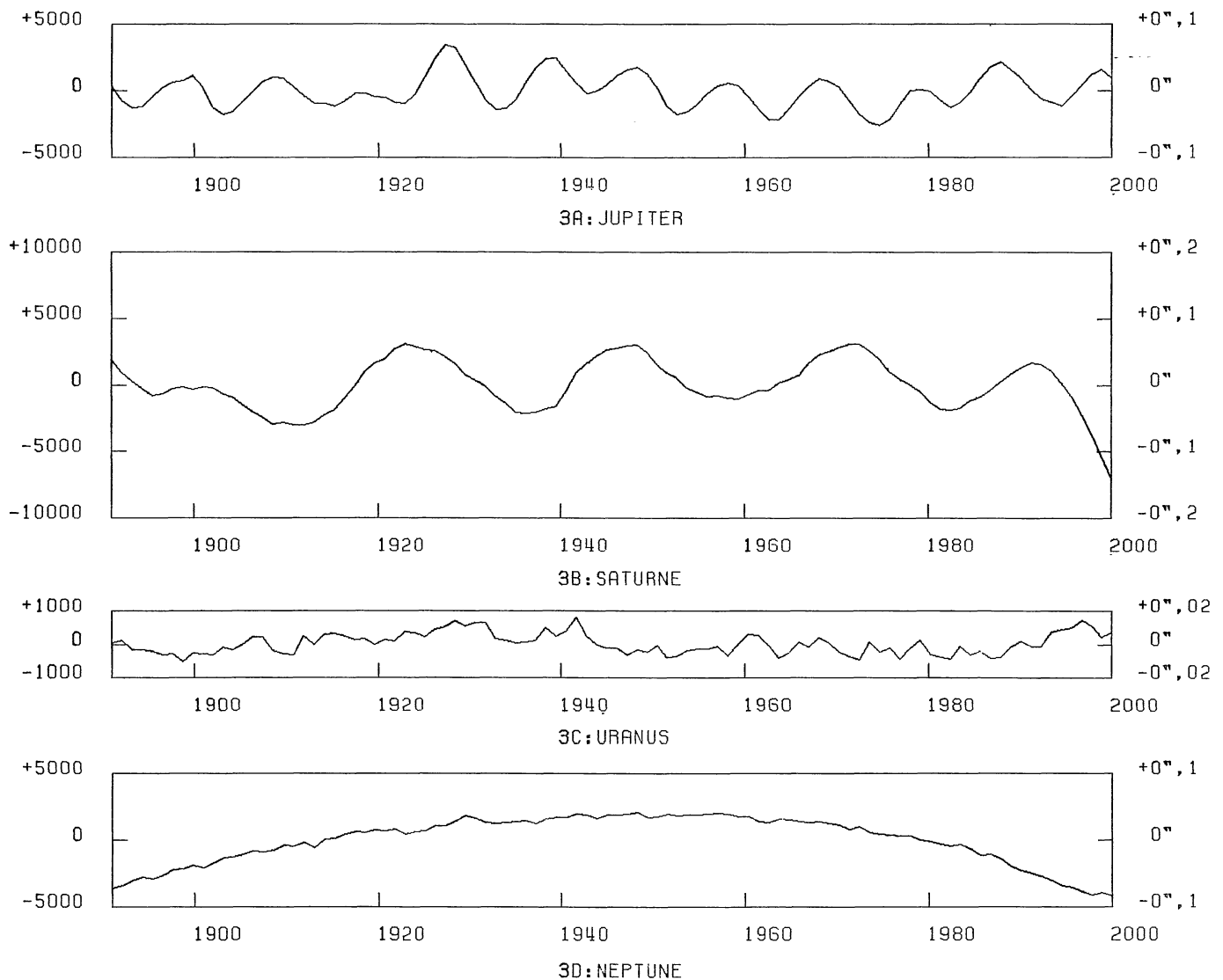


Fig. 3a-d. Longitudes vraies de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Différences VSOP82-DE200 sur un siècle. L'unité est 10^{-10} radian (échelle de gauche) ou la seconde de degré (échelle de droite)

Tableau 7. Eléments moyens rapportés à l'écliptique fixe dynamique J2000. Le temps T est compté en milliers d'années juliennes à partir de J2000 (2451 545)**Mercure**

$$a = 0,387\,098\,309\,82$$

$$\lambda = \lambda^0 + 26087,903\,141\,574\,20\,T - 0,000\,009\,342\,90\,T^2 + 0,000\,000\,031\,00\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,005\,521\,146\,24\,T - 0,000\,018\,603\,97\,T^2 + 0,000\,000\,633\,62\,T^3$$

$$h = h_0 + 0,001\,437\,501\,18\,T - 0,000\,079\,746\,89\,T^2 - 0,000\,000\,263\,09\,T^3$$

$$q = q_0 + 0,000\,654\,331\,17\,T - 0,000\,010\,712\,15\,T^2 + 0,000\,000\,211\,49\,T^3$$

$$p = p_0 - 0,001\,276\,336\,57\,T - 0,000\,009\,133\,50\,T^2 + 0,000\,000\,180\,04\,T^3$$

Vénus

$$a = 0,723\,329\,819\,96$$

$$\lambda = \lambda^0 + 10213,285\,546\,211\,00\,T + 0,000\,002\,875\,55\,T^2 - 0,000\,000\,030\,38\,T^3$$

$$k = k_0 + 0,000\,312\,590\,19\,T + 0,000\,006\,059\,13\,T^2 - 0,000\,000\,692\,39\,T^3$$

$$h = h_0 - 0,000\,361\,212\,39\,T + 0,000\,018\,396\,27\,T^2 - 0,000\,000\,009\,71\,T^3$$

$$q = q_0 + 0,001\,381\,338\,26\,T - 0,000\,010\,909\,42\,T^2 - 0,000\,001\,859\,20\,T^3$$

$$p = p_0 - 0,000\,403\,847\,91\,T - 0,000\,062\,328\,91\,T^2 + 0,000\,000\,251\,37\,T^3$$

La Terre

$$a = 1,000\,001\,017\,78$$

$$\lambda = \lambda^0 + 6283,075\,849\,180\,00\,T - 0,000\,009\,918\,90\,T^2 + 0,000\,000\,000\,73\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,000\,822\,666\,99\,T + 0,000\,027\,489\,39\,T^2 + 0,000\,001\,042\,17\,T^3$$

$$h = h_0 - 0,000\,620\,302\,59\,T - 0,000\,033\,538\,88\,T^2 + 0,000\,000\,711\,85\,T^3$$

$$q = -0,001\,134\,690\,02\,T + 0,000\,012\,373\,14\,T^2 + 0,000\,001\,270\,50\,T^3$$

$$p = +0,000\,101\,803\,91\,T + 0,000\,047\,019\,98\,T^2 - 0,000\,000\,538\,29\,T^3$$

Mars

$$a = 1,523\,679\,341\,91 + 0,000\,000\,000\,31\,T$$

$$\lambda = \lambda^0 + 3340,612\,431\,492\,30\,T + 0,000\,004\,547\,61\,T^2 - 0,000\,000\,050\,57\,T^3$$

$$k = k_0 + 0,003\,763\,301\,52\,T - 0,000\,246\,574\,16\,T^2 - 0,000\,003\,952\,41\,T^3$$

$$h = h_0 + 0,006\,246\,574\,65\,T + 0,000\,155\,272\,32\,T^2 - 0,000\,006\,719\,40\,T^3$$

$$q = q_0 + 0,000\,171\,385\,26\,T - 0,000\,040\,775\,91\,T^2 - 0,000\,001\,386\,00\,T^3$$

$$p = p_0 - 0,001\,080\,200\,83\,T - 0,000\,019\,221\,95\,T^2 + 0,000\,000\,883\,73\,T^3$$

Jupiter

$$a = 5,202\,603\,191\,32 + 0,000\,001\,913\,23\,T$$

$$\lambda = \lambda^0 + 529,690\,965\,094\,60\,T - 0,000\,148\,371\,33\,T^2 + 0,000\,000\,074\,82\,T^3$$

$$k = k_0 + 0,001\,130\,103\,77\,T - 0,000\,109\,301\,26\,T^2 - 0,000\,004\,287\,48\,T^3 + 0,000\,000\,205\,39\,T^4$$

$$h = h_0 + 0,002\,171\,493\,60\,T + 0,000\,098\,585\,39\,T^2 - 0,000\,005\,131\,09\,T^3 - 0,000\,000\,090\,07\,T^4$$

$$q = q_0 - 0,000\,313\,401\,56\,T - 0,000\,016\,673\,92\,T^2 + 0,000\,000\,769\,26\,T^3$$

$$p = p_0 - 0,000\,234\,275\,62\,T + 0,000\,020\,867\,60\,T^2 + 0,000\,000\,507\,21\,T^3$$

Saturne

$$a = 9,554\,909\,595\,74 - 0,000\,021\,389\,17\,T$$

$$\lambda = \lambda^0 + 213,299\,095\,438\,00\,T + 0,000\,366\,597\,41\,T^2 - 0,000\,000\,333\,30\,T^3 + 0,000\,000\,002\,17\,T^4$$

$$k = k_0 - 0,005\,296\,026\,26\,T + 0,000\,309\,284\,05\,T^2 + 0,000\,012\,962\,15\,T^3 - 0,000\,000\,599\,59\,T^4$$

$$h = h_0 - 0,003\,755\,938\,87\,T - 0,000\,319\,902\,36\,T^2 + 0,000\,015\,986\,33\,T^3 + 0,000\,000\,324\,51\,T^4$$

$$q = q_0 + 0,000\,801\,714\,99\,T + 0,000\,041\,422\,82\,T^2 - 0,000\,001\,960\,49\,T^3 - 0,000\,000\,094\,39\,T^4$$

$$p = p_0 + 0,000\,594\,397\,66\,T - 0,000\,052\,351\,17\,T^2 - 0,000\,001\,272\,19\,T^3 + 0,000\,000\,082\,95\,T^4$$

Uranus

$$a = 19,218\,446\,061\,78 - 0,000\,000\,371\,63\,T + 0,000\,000\,097\,91\,T^2$$

$$\lambda = \lambda^0 + 74,781\,598\,567\,30\,T - 0,000\,008\,488\,28\,T^2 + 0,000\,000\,104\,50\,T^3$$

$$k = k_0 + 0,000\,183\,440\,50\,T - 0,000\,000\,808\,49\,T^2 - 0,000\,000\,453\,96\,T^3 + 0,000\,000\,021\,85\,T^4$$

$$h = h_0 - 0,000\,749\,643\,50\,T + 0,000\,012\,102\,00\,T^2 - 0,000\,000\,420\,88\,T^3 - 0,000\,000\,017\,14\,T^4$$

$$q = q_0 - 0,000\,124\,493\,82\,T - 0,000\,002\,073\,73\,T^2 + 0,000\,000\,076\,21\,T^3$$

$$p = p_0 - 0,000\,117\,447\,33\,T + 0,000\,003\,177\,99\,T^2 + 0,000\,000\,073\,17\,T^3$$

Tableau 7 (suite)

Neptune

$$\begin{aligned}
a &= 30,110\,386\,869\,42 - 0,000\,001\,663\,46\,T + 0,000\,000\,068\,57\,T^2 \\
\lambda &= \lambda_0 + 38,133\,035\,637\,80\,T + 0,000\,001\,023\,11\,T^2 - 0,000\,000\,043\,40\,T^3 \\
k &= k_0 + 0,000\,008\,712\,79\,T - 0,000\,001\,199\,02\,T^2 - 0,000\,000\,040\,34\,T^3 \\
h &= h_0 + 0,000\,078\,243\,36\,T + 0,000\,000\,808\,01\,T^2 - 0,000\,000\,039\,55\,T^3 \\
q &= q_0 - 0,000\,000\,727\,27\,T - 0,000\,000\,065\,68\,T^2 + 0,000\,000\,016\,68\,T^3 \\
p &= p_0 + 0,000\,025\,755\,36\,T + 0,000\,000\,193\,77\,T^2 + 0,000\,000\,013\,31\,T^3
\end{aligned}$$

DE200 utilise les valeurs suivantes pour Jupiter, Saturne et Uranus:

$$m_J = 1/1047,350$$

$$m_S = 1/3498$$

$$m_U = 1/22960.$$

La comparaison de ces valeurs à celles du Tableau 5 montre de grandes différences, en particulier pour la masse d'Uranus. Ces différences de masses modifient les perturbations de Jupiter et surtout de Saturne et Neptune. Par contre, les différences pour Uranus restent faibles.

Pour illustrer les différences du Tableau 6, nous avons représenté les différences VSOP82–DE200 concernant les longitudes vraies des quatre planètes inférieures sur la Fig. 2 et celles concernant les longitudes vraies des quatre grosses planètes sur la Fig. 3. L'intervalle de temps est compris entre 1891 et 2000. L'axe des ordonnées de gauche donne les écarts en 10^{-10} radian, l'axe de droite en seconde de degré. La théorie qui est comparée à DE200 est constituée de la solution newtonienne et des perturbations relativistes exprimées en coordonnées isotropiques puisque DE200 est exprimée dans ces mêmes coordonnées. Nous donnons dans le Tableau 7 les éléments moyens des huit planètes rapportés à l'écliptique fixe dynamique J2000. Les demi-grands axes sont en UA; les longitudes moyennes en radians; les quantités k, h, q, p sont sans dimension. Le temps T est compté en milliers d'années juliennes à partir de J2000. On constate une différence pour les demi-grands axes entre le Tableau 7 et le Tableau 5. Elle provient de la perturbation constante relativiste exprimée en coordonnées isotropiques. Les constantes des cinq autres éléments sont celles du Tableau 4.

Nous avons déterminé également les éléments moyens rapportés à l'écliptique de la date. Pour cela nous avons utilisé les éléments moyens rapportés à l'écliptique fixe du Tableau 7 et les formules de la précession de (Bretagnon et Chapront, 1981). Nous avons choisi ce formulaire de la précession, plutôt que celui de Lieske et al. (1977), car il a été calculé à partir des éléments q et p de la Terre du Tableau 7. L'utilisation d'expressions cohérentes pour ces variables est en effet nécessaire pour aboutir à des éléments moyens de la date q et p de la Terre identiquement nuls. Nous donnons ces éléments moyens dans le Tableau 8. Les unités sont les mêmes que celles du Tableau 7. Nous avons choisi de conserver dans le Tableau 8 le même nombre de décimales quelle que soit la planète considérée. En fait, la précision réelle de ces expressions se déduit de la précision de la théorie telle qu'elle apparaît dans le Tableau 6 pour les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars et dans le Tableau 3 pour les planètes Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Finalement, on peut estimer que, pour la solution choisie VSOP82 et pour le modèle ayant servi à l'ajustement des constantes, la précision des éléments moyens est 10^{-10} pour Mercure, 10^{-9} pour Vénus, la Terre et Mars et 10^{-8} pour Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

Conclusion

La solution VSOP82 apporte un gain important en précision par rapport à la solution publiée dans (Bretagnon, 1980, 1981), en particulier pour les grosses planètes. Elle est ajustée à l'observation à travers l'intégration numérique DE200 du JPL. Elle représente donc un progrès, tant par sa qualité intrinsèque que par son ajustement à des observations récentes, sur les théories anciennes de Le Verrier et de Newcomb. La solution TOP82 (Simon, 1982) et la solution VSOP82 remplaceront les théories de Le Verrier dans les éphémérides du Soleil et des planètes publiées par le Bureau des Longitudes à partir de 1984.

Remerciements. Je remercie vivement Monsieur J. Chapront et Monsieur J.-L. Simon avec qui j'ai eu des discussions nombreuses et fructueuses. Je remercie Monsieur M. Standish pour tous les renseignements qu'il nous a fournis concernant DE200, en particulier sa détermination de l'écliptique dynamique.

Appendice*a) Dérivées de $r, \bar{q}, \bar{\tau}$*

$$\frac{\partial r}{\partial k} = -a \left[\cos w - h \frac{\psi}{\varphi} \operatorname{Im}(\bar{z}\bar{\tau}) \right];$$

$$\frac{\partial r}{\partial h} = -a \left[\sin w + k \frac{\psi}{\varphi} \operatorname{Im}(\bar{z}\bar{\tau}) \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial k \partial h} &= -a \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} \right) - ah \frac{\psi}{\varphi} \operatorname{Im} \left(z \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} \right) \\
&\quad + a \frac{\psi}{\varphi} \left[1 + \frac{h^2}{\varphi} \left(\psi + \frac{1}{\varphi} \right) \right] \operatorname{Im}(\bar{z}\bar{\tau}) - ah \frac{\psi}{\varphi} \cos w
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial k} = -a - \frac{\sqrt{-1}}{\varphi^2} (h + \sin w) \bar{q} - \sqrt{-1} ah \frac{\psi}{\varphi} (\bar{z} + \bar{\tau})$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial h} = \sqrt{-1} a + \frac{\sqrt{-1}}{\varphi^2} (k + \cos w) \bar{q} + \sqrt{-1} ah \frac{\psi}{\varphi} (\bar{z} + \bar{\tau})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial k \partial h} &= -\frac{\sqrt{-1}}{\varphi^2} (h + \sin w) \left(2 \frac{h}{\varphi^2} \bar{q} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial h} \right) + \frac{\sqrt{-1}}{\varphi^2} \left[-1 + \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} \right) \right] \bar{q} \\
&\quad - \sqrt{-1} a \frac{\psi}{\varphi} \left[1 + \frac{h^2}{\varphi} \left(\psi + \frac{1}{\varphi} \right) \right] (\bar{z} + \bar{\tau}) - ah \frac{\psi}{\varphi} \left(1 + \sqrt{-1} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial k} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial k} - \bar{\tau} \frac{\partial r}{\partial k} \right); \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial h} - \bar{\tau} \frac{\partial r}{\partial h} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial k \partial h} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial k \partial h} - \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial k} \frac{\partial r}{\partial h} - \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} \frac{\partial r}{\partial k} - \bar{\tau} \frac{\partial^2 r}{\partial k \partial h} \right).$$

Tableau 8. Eléments moyens rapportés à l'écliptique et l'équinoxe dynamiques de la date. Le temps T est compté en milliers d'années juliennes à partir de J2000 (2451 545)**Mercure**

$$\alpha = 0,38709\,83098$$

$$\lambda = \lambda^0 + 26088,14707\,11010\,T + 0,00053\,05220\,T^2 + 0,00000\,03097\,T^3 + 0,00000\,00022\,T^4$$

$$k = k_0 - 0,05448\,34872\,T - 0,00180\,63052\,T^2 + 0,00066\,31851\,T^3 + 0,00001\,46668\,T^4 - 0,00000\,23759\,T^5 - 0,00000\,00510\,T^6 + 0,00000\,00038\,T^7$$

$$h = h_0 + 0,01233\,15378\,T - 0,00737\,40873\,T^2 - 0,00018\,50021\,T^3 + 0,00004\,45323\,T^4 + 0,00000\,09447\,T^5 - 0,00000\,01047\,T^6 - 0,00000\,00022\,T^7$$

$$q = q_0 - 0,00934\,23887\,T - 0,00091\,94385\,T^2 + 0,00006\,51855\,T^3 + 0,00000\,36846\,T^4 - 0,00000\,01337\,T^5 - 0,00000\,00055\,T^6$$

$$p = p_0 + 0,00852\,71267\,T - 0,00095\,54616\,T^2 - 0,00006\,71422\,T^3 + 0,00000\,33240\,T^4 + 0,00000\,01594\,T^5 - 0,00000\,00043\,T^6$$

Vénus

$$\alpha = 0,72332\,98200$$

$$\lambda = \lambda^0 + 10213,52943\,05233\,T + 0,00054\,21057\,T^2 + 0,00000\,02537\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,00092\,31346\,T + 0,00022\,50365\,T^2 - 0,00000\,14408\,T^3 - 0,00000\,16821\,T^4 + 0,00000\,00623\,T^5 + 0,00000\,00051\,T^6$$

$$h = h_0 - 0,00145\,69408\,T - 0,00005\,84775\,T^2 + 0,00002\,25733\,T^3 - 0,00000\,06030\,T^4 - 0,00000\,01007\,T^5 + 0,00000\,00042\,T^6$$

$$q = q_0 - 0,00451\,29495\,T - 0,00011\,84303\,T^2 + 0,00001\,77664\,T^3 + 0,00000\,04721\,T^4 - 0,00000\,00036\,T^5 - 0,00000\,00002\,T^6$$

$$p = p_0 + 0,00115\,84562\,T - 0,00034\,92012\,T^2 - 0,00000\,87791\,T^3 + 0,00000\,05940\,T^4 + 0,00000\,00171\,T^5 + 0,00000\,00013\,T^6$$

La Terre

$$\alpha = 1,00000\,10178$$

$$\lambda = \lambda^0 + 6283,31966\,66635\,T + 0,00053\,00181\,T^2 + 0,00000\,03692\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,00479\,31064\,T + 0,00028\,11275\,T^2 + 0,00007\,38309\,T^3 - 0,00000\,26511\,T^4 - 0,00000\,03676\,T^5 + 0,00000\,00082\,T^6$$

$$h = h_0 - 0,00153\,23789\,T - 0,00072\,01706\,T^2 + 0,00003\,22989\,T^3 + 0,00000\,57885\,T^4 - 0,00000\,01659\,T^5 - 0,00000\,00196\,T^6$$

Mars

$$\alpha = 1,52367\,93419 + 0,00000\,00003\,T$$

$$\lambda = \lambda^0 + 3340,85627\,89898\,T + 0,00054\,27485\,T^2 + 0,00000\,02663\,T^3$$

$$k = k_0 + 0,01300\,50525\,T - 0,00428\,73758\,T^2 - 0,00025\,98371\,T^3 + 0,00003\,54359\,T^4 + 0,00000\,15619\,T^5 - 0,00000\,01107\,T^6 - 0,00000\,00041\,T^7$$

$$h = h_0 + 0,02706\,27603\,T + 0,00224\,56771\,T^2 - 0,00045\,18251\,T^3 - 0,00002\,25665\,T^4 + 0,00000\,21906\,T^5 + 0,00000\,00898\,T^6 - 0,00000\,00045\,T^7$$

$$q = q_0 - 0,00168\,94313\,T - 0,00008\,28113\,T^2 + 0,00000\,36129\,T^3 - 0,00000\,00219\,T^4 + 0,00000\,00241\,T^5 + 0,00000\,00011\,T^6$$

$$p = p_0 + 0,00137\,10386\,T - 0,00010\,73560\,T^2 - 0,00000\,26035\,T^3 - 0,00000\,00679\,T^4 - 0,00000\,00106\,T^5 + 0,00000\,00024\,T^6$$

Jupiter

$$\alpha = 5,20260\,31913 + 0,00000\,19132\,T$$

$$\lambda = \lambda^0 + 529,93480\,75394\,T + 0,00039\,04990\,T^2 + 0,00000\,04374\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,00179\,69488\,T - 0,00204\,21373\,T^2 - 0,00004\,02623\,T^3 + 0,00001\,68535\,T^4 + 0,00000\,05800\,T^5 - 0,00000\,00608\,T^6 - 0,00000\,00022\,T^7$$

$$h = h_0 + 0,01362\,86045\,T + 0,00004\,26023\,T^2 - 0,00021\,08274\,T^3 - 0,00000\,61282\,T^4 + 0,00000\,11026\,T^5 + 0,00000\,00412\,T^6 - 0,00000\,00027\,T^7$$

$$q = q_0 - 0,00190\,57236\,T + 0,00010\,82728\,T^2 + 0,00000\,89342\,T^3 - 0,00000\,04218\,T^4 - 0,00000\,00122\,T^5 + 0,00000\,00011\,T^6$$

$$p = p_0 - 0,00083\,97307\,T - 0,00015\,94888\,T^2 + 0,00000\,79163\,T^3 + 0,00000\,03776\,T^4 - 0,00000\,00205\,T^5 - 0,00000\,00003\,T^6$$

Saturne

$$\alpha = 9,55490\,95957 - 0,00002\,13892\,T$$

$$\lambda = \lambda^0 + 213,54295\,62981\,T + 0,00090\,67343\,T^2 - 0,00000\,00557\,T^3 + 0,00000\,00017\,T^4$$

$$k = k_0 - 0,01881\,31383\,T + 0,00128\,32847\,T^2 + 0,00038\,48105\,T^3 - 0,00002\,14460\,T^4 - 0,00000\,25225\,T^5 + 0,00000\,01112\,T^6 + 0,00000\,00076\,T^7$$

$$h = h_0 - 0,00447\,77706\,T - 0,00326\,11427\,T^2 + 0,00020\,00724\,T^3 + 0,00003\,46612\,T^4 - 0,00000\,17338\,T^5 - 0,00000\,01542\,T^6 + 0,00000\,00055\,T^7$$

$$q = q_0 - 0,00291\,41827\,T + 0,00015\,73509\,T^2 + 0,00001\,23816\,T^3 - 0,00000\,07530\,T^4 - 0,00000\,00283\,T^5 + 0,00000\,00040\,T^6$$

$$p = p_0 - 0,00163\,30436\,T - 0,00022\,33231\,T^2 + 0,00001\,11925\,T^3 + 0,00000\,05881\,T^4 - 0,00000\,00548\,T^5 - 0,00000\,00016\,T^6$$

Uranus

$$\alpha = 19,21844\,60618 - 0,00000\,03716\,T + 0,00000\,00979\,T^2$$

$$\lambda = \lambda^0 + 75,02543\,11493\,T + 0,00053\,11712\,T^2 + 0,00000\,04525\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,00119\,12664\,T + 0,00154\,49390\,T^2 + 0,00001\,12133\,T^3 - 0,00000\,83600\,T^4 - 0,00000\,00380\,T^5 + 0,00000\,00168\,T^6$$

$$h = h_0 - 0,01195\,40732\,T - 0,00013\,55665\,T^2 + 0,00013\,20329\,T^3 + 0,00000\,07337\,T^4 - 0,00000\,04157\,T^5 - 0,00000\,00015\,T^6$$

$$q = q_0 - 0,00057\,13203\,T - 0,00001\,97534\,T^2 - 0,00000\,49897\,T^3 + 0,00000\,00189\,T^4 + 0,00000\,00323\,T^5 + 0,00000\,00006\,T^6$$

$$p = p_0 + 0,00023\,40586\,T + 0,00001\,06597\,T^2 - 0,00000\,11931\,T^3 - 0,00000\,04831\,T^4 - 0,00000\,00048\,T^5 + 0,00000\,00018\,T^6$$

Neptune

$$\alpha = 30,11038\,68694 - 0,00000\,16635\,T + 0,00000\,00686\,T^2$$

$$\lambda = \lambda^0 + 38,37687\,71649\,T + 0,00053\,97652\,T^2 + 0,00000\,03066\,T^3$$

$$k = k_0 - 0,00162\,31781\,T - 0,00020\,22529\,T^2 + 0,00001\,48426\,T^3 + 0,00000\,12224\,T^4 - 0,00000\,00341\,T^5 - 0,00000\,00031\,T^6$$

$$h = h_0 + 0,00154\,12378\,T - 0,00019\,27965\,T^2 - 0,00001\,80283\,T^3 + 0,00000\,08224\,T^4 + 0,00000\,00668\,T^5 - 0,00000\,00010\,T^6$$

$$q = q_0 - 0,00167\,43180\,T + 0,00030\,58262\,T^2 + 0,00000\,56754\,T^3 - 0,00000\,14012\,T^4 - 0,00000\,00046\,T^5 + 0,00000\,00030\,T^6$$

$$p = p_0 - 0,00258\,54023\,T - 0,00011\,82724\,T^2 + 0,00002\,37388\,T^3 + 0,00000\,02091\,T^4 - 0,00000\,00686\,T^5 + 0,00000\,00001\,T^6$$

b) Dérivées de Δ^2

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\varrho} \pi) \text{ où}$$

$$\pi = (\chi \chi' + \bar{\zeta} \bar{\zeta}')^2 \varrho' + (\zeta \chi' - \zeta' \chi)^2 \bar{\varrho}'$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial k} = 2r \frac{\partial r}{\partial k} - 2 \operatorname{Re} \left(\pi \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial k} \right); \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial h} = 2r \frac{\partial r}{\partial h} - 2 \operatorname{Re} \left(\pi \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial h} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta^2}{\partial k \partial h} = 2 \frac{\partial r}{\partial k} \frac{\partial r}{\partial h} + 2r \frac{\partial^2 r}{\partial k \partial h} - 2 \operatorname{Re} \left(\pi \frac{\partial^2 \bar{\varrho}}{\partial k \partial h} \right).$$

c) Dérivées du vecteur de position V

$$V = -\operatorname{Im}(\bar{\varrho} L) \quad \text{avec} \quad L = \begin{cases} -\sqrt{-1} + 2p\zeta \\ 1 - 2q\zeta \\ 2\chi\zeta \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = -\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial k} L \right);$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial h} L \right); \quad \frac{\partial^2 V}{\partial k \partial h} = -\operatorname{Im} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varrho}}{\partial k \partial h} L \right).$$

d) Dérivées de $D_a V$

$$D_a V = 2 \frac{a^2}{\varphi} \operatorname{Re}[(\bar{z} + \bar{\tau}) L]$$

$$\frac{\partial D_a V}{\partial k} = \frac{k}{\varphi^2} D_a V + 2 \frac{a^2}{\varphi} \operatorname{Re} \left[\left(1 + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial k} \right) L \right]$$

$$\frac{\partial D_a V}{\partial h} = \frac{h}{\varphi^2} D_a V + 2 \frac{a^2}{\varphi} \operatorname{Re} \left[\left(-\sqrt{-1} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial h} \right) L \right]$$

$$\frac{\partial^2 D_a V}{\partial k \partial h} = \frac{hk}{\varphi^4} D_a V + \frac{1}{\varphi^2} \left(k \frac{\partial D_a V}{\partial h} + h \frac{\partial D_a V}{\partial k} \right) + 2 \frac{a^2}{\varphi} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial k \partial h} L \right)$$

Bibliographie

- Bretagnon, P.: 1980, *Astron. Astrophys.* **84**, 329
 Bretagnon, P.: 1981, *Astron. Astrophys.* **101**, 342
 Bretagnon, P.: 1982a, *Astron. Astrophys.* **108**, 69
 Bretagnon, P.: 1982b, *Celes. Mech.* **26**, 161
 Bretagnon, P., Chapront, J.: 1981, *Astron. Astrophys.* **103**, 103
 Lestrade, J.-F., Bretagnon, P.: 1982, *Astron. Astrophys.* **105**, 42
 Lieske, J.H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B.: 1977, *Astron. Astrophys.* **58**, 1
 Oesterwinter, C., Cohen, C.J.: 1972, *Celes. Mech.* **5**, 317
 Simon, J.-L.: 1982, *Astron. Astrophys.* (à paraître)
 Standish, E.M.: 1981, *Astron. Astrophys.* **101**, L17
 Standish, E.M.: 1982 (à paraître)